**勾股定理的证明**

**【证法1】（课本的证明）**



做8个全等的直角三角形，设它们的两条直角边长分别为a、b，斜边长为c，再做三个边长分别为a、b、c的正方形，把它们像上图那样拼成两个正方形**.**

从图上可以看到，这两个正方形的边长都是a + b，所以面积相等**.** 即

整理得 **.**



**【证法2】（邹元治证明）**

以a、b 为直角边，以c为斜边做四个全等的直角三角形，则每个直角三角形的面积等于**.** 把这四个直角三角形拼成如图所示形状，使A、E、B三点在一条直线上，B、F、C三点在一条直线上，C、G、D三点在一条直线上**.**



∵ RtΔHAE ≌ RtΔEBF,



∴ ∠AHE = ∠BEF**.**

∵ ∠AEH + ∠AHE = 90º,

∴ ∠AEH + ∠BEF = 90º**.**

∴ ∠HEF = 180º―90º= 90º**.**

∴ 四边形EFGH是一个边长为c的

正方形**.** 它的面积等于c2.

∵ RtΔGDH ≌ RtΔHAE,

∴ ∠HGD = ∠EHA**.**

∵ ∠HGD + ∠GHD = 90º,

∴ ∠EHA + ∠GHD = 90º**.**

又∵ ∠GHE = 90º,

∴ ∠DHA = 90º+ 90º= 180º**.**

∴ ABCD是一个边长为a + b的正方形，它的面积等于**.**



∴ **.** ∴ **.**



**【证法3】（赵爽证明，嘻嘻，大家熟悉的弦图鸭~）**

以a、b 为直角边（b>a）， 以c为斜



边作四个全等的直角三角形，则每个直角

三角形的面积等于**.** 把这四个直角三



角形拼成如图所示形状**.**

∵ RtΔDAH ≌ RtΔABE,

∴ ∠HDA = ∠EAB**.**

∵ ∠HAD + ∠HAD = 90º，

∴ ∠EAB + ∠HAD = 90º，

∴ ABCD是一个边长为c的正方形，它的面积等于c2.

∵ EF = FG =GH =HE = b―a ,

∠HEF = 90º**.**

∴ EFGH是一个边长为b―a的正方形，它的面积等于.



∴ **.**



∴ **.**



**【证法4】（1876年美国总统Garfield证明）**

以a、b 为直角边，以c为斜边作两个全等的直角三角形，则每个直角三角形的面积等于**.** 把这两个直角三角形拼成如图所示形状，使A、E、B三点在一条直线上**.**



∵ RtΔEAD ≌ RtΔCBE,



∴ ∠ADE = ∠BEC**.**

∵ ∠AED + ∠ADE = 90º,

∴ ∠AED + ∠BEC = 90º**.**

∴ ∠DEC = 180º―90º= 90º**.**

∴ ΔDEC是一个等腰直角三角形，

它的面积等于**.**



又∵ ∠DAE = 90º, ∠EBC = 90º,

∴ AD∥BC**.**

∴ ABCD是一个直角梯形，它的面积等于**.**



∴ **.**



∴ **.**



**【证法5】（梅文鼎证明）**

做四个全等的直角三角形，设它们的两条直角边长分别为a、b ，斜边长为c**.** 把它们拼成如图那样的一个多边形，使D、E、F在一条直线上**.** 过C作AC的延长线交DF于点P**.**

∵ D、E、F在一条直线上, 且RtΔGEF ≌ RtΔEBD,

∴ ∠EGF = ∠BED，

∵ ∠EGF + ∠GEF = 90°，



∴ ∠BED + ∠GEF = 90°，

∴ ∠BEG =180º―90º= 90º**.**

又∵ AB = BE = EG = GA = c，

∴ ABEG是一个边长为c的正方形**.**

∴ ∠ABC + ∠CBE = 90º**.**

∵ RtΔABC ≌ RtΔEBD,

∴ ∠ABC = ∠EBD**.**

∴ ∠EBD + ∠CBE = 90º**.**

即 ∠CBD= 90º**.**

又∵ ∠BDE = 90º，∠BCP = 90º，

BC = BD = a**.**

∴ BDPC是一个边长为a的正方形**.**

同理，HPFG是一个边长为b的正方形**.**

设多边形GHCBE的面积为S，则



,



∴ **.**



**【证法6】（项明达证明）**

做两个全等的直角三角形，设它们的两条直角边长分别为a、b（b>a） ，斜边长为c**.** 再做一个边长为c的正方形**.** 把它们拼成如图所示的多边形，使E、A、C三点在一条直线上**.**

过点Q作QP∥BC，交AC于点P**.**

过点B作BM⊥PQ，垂足为M；再过点

F作FN⊥PQ，垂足为N**.**



∵ ∠BCA = 90º，QP∥BC，

∴ ∠MPC = 90º，

∵ BM⊥PQ，

∴ ∠BMP = 90º，

∴ BCPM是一个矩形，即∠MBC = 90º**.**

∵ ∠QBM + ∠MBA = ∠QBA = 90º，

∠ABC + ∠MBA = ∠MBC = 90º，

∴ ∠QBM = ∠ABC，

又∵ ∠BMP = 90º，∠BCA = 90º，BQ = BA = c，

∴ RtΔBMQ ≌ RtΔBCA**.**

同理可证RtΔQNF ≌ RtΔAEF**.**

从而将问题转化为【证法4】（梅文鼎证明）**.**

**【证法7】（欧几里得证明）**

做三个边长分别为a、b、c的正方形，把它们拼成如图所示形状，使H、C、B三点在一条直线上，连结BF、CD**.** 过C作CL⊥DE，交AB于点M，交DE于点L**.**



∵ AF = AC，AB = AD，

∠FAB = ∠GAD，

∴ ΔFAB ≌ ΔGAD，

∵ ΔFAB的面积等于，



ΔGAD的面积等于矩形ADLM

的面积的一半，

∴ 矩形ADLM的面积 =**.**



同理可证，矩形MLEB的面积 =**.**



∵ 正方形ADEB的面积

= 矩形ADLM的面积 + 矩形MLEB的面积

∴ ，即 **.**



**【证法8】（利用相似三角形性质证明，嗷嗷啊我好激动！）**

如图，在RtΔABC中，设直角边AC、BC的长度分别为a、b，斜边AB的长为c，过点C作CD⊥AB，垂足是D**.**



在ΔADC和ΔACB中，

∵ ∠ADC = ∠ACB = 90º，

∠CAD = ∠BAC，

∴ ΔADC ∽ ΔACB**.**

AD∶AC = AC ∶AB，

即 **.**



同理可证，ΔCDB ∽ ΔACB，从而有 **.**



∴ ，即 **.**



**【证法9】（杨作玫证明）**

做两个全等的直角三角形，设它们的两条直角边长分别为a、b（b>a），斜边长为c**.** 再做一个边长为c的正方形**.** 把它们拼成如图所示的多边形**.** 过A作AF⊥AC，AF交GT于F，AF交DT于R**.** 过B作BP⊥AF，垂足为P**.** 过D作DE与CB的延长线垂直，垂足为E，DE交AF于H**.**

∵ ∠BAD = 90º，∠PAC = 90º，

∴ ∠DAH = ∠BAC**.**

又∵ ∠DHA = 90º，∠BCA = 90º，



AD = AB = c，

∴ RtΔDHA ≌ RtΔBCA**.**

∴ DH = BC = a，AH = AC = b**.**

由作法可知， PBCA 是一个矩形，

所以 RtΔAPB ≌ RtΔBCA**.** 即PB =

CA = b，AP= a，从而PH = b―a**.**

∵ RtΔDGT ≌ RtΔBCA ,

RtΔDHA ≌ RtΔBCA**.**

∴ RtΔDGT ≌ RtΔDHA **.**

∴ DH = DG = a，∠GDT = ∠HDA **.**

又∵ ∠DGT = 90º，∠DHF = 90º，

∠GDH = ∠GDT + ∠TDH = ∠HDA+ ∠TDH = 90º，

∴ DGFH是一个边长为a的正方形**.**

∴ GF = FH = a **.** TF⊥AF，TF = GT―GF = b―a **.**

∴ TFPB是一个直角梯形，上底TF=b―a，下底BP= b，高FP=a +（b―a）**.**

用数字表示面积的编号（如图），则以c为边长的正方形的面积为

①



∵ = ，



，



∴ = **.** ②



把②代入①，得



= = **.**



∴ **.**



**【证法10】（李锐证明）**

设直角三角形两直角边的长分别为a、b（b>a），斜边的长为c**.** 做三个边长分别为a、b、c的正方形，把它们拼成如图所示形状，使A、E、G三点在一条直线上**.** 用数字表示面积的编号（如图）**.**

∵ ∠TBE = ∠ABH = 90º，



∴ ∠TBH = ∠ABE**.**

又∵ ∠BTH = ∠BEA = 90º，

BT = BE = b，

∴ RtΔHBT ≌ RtΔABE**.**

∴ HT = AE = a**.**

∴ GH = GT―HT = b―a**.**

又∵ ∠GHF + ∠BHT = 90º，

∠DBC + ∠BHT = ∠TBH + ∠BHT = 90º，

∴ ∠GHF = ∠DBC**.**

∵ DB = EB―ED = b―a，

∠HGF = ∠BDC = 90º，

∴ RtΔHGF ≌ RtΔBDC**.** 即 **.**



过Q作QM⊥AG，垂足是M**.** 由∠BAQ = ∠BEA = 90º，可知 ∠ABE = ∠QAM，而AB = AQ = c，所以RtΔABE ≌ RtΔQAM **.** 又RtΔHBT ≌ RtΔABE**.** 所以RtΔHBT ≌ RtΔQAM **.** 即 **.**



由RtΔABE ≌ RtΔQAM，又得QM = AE = a，∠AQM = ∠BAE**.**

∵ ∠AQM + ∠FQM = 90º，∠BAE + ∠CAR = 90º，∠AQM = ∠BAE，

∴ ∠FQM = ∠CAR**.**

又∵ ∠QMF = ∠ARC = 90º，QM = AR = a，

∴ RtΔQMF ≌ RtΔARC**.** 即**.**



∵ ，，，



又∵ ，，，



∴



=



=，



即 **.**



**【证法11】（利用切割线定理证明，这个超酷的！）**

在RtΔABC中，设直角边BC = a，AC = b，斜边AB = c**.** 如图，以B为圆心a为半径作圆，交AB及AB的延长线分别于D、E，则BD = BE = BC = a**.** 因为∠BCA = 90º，点C在⊙B上，所以AC是⊙B 的切线**.** 由切割线定理，得



=



=



= ，



即，



∴ **.**



**【证法12】（利用多列米定理证明，这个更更更酷！！）**

在RtΔABC中，设直角边BC = a，AC = b，斜边AB = c（如图）**.** 过点A作AD∥CB，过点B作BD∥CA，则ACBD为矩形，矩形ACBD内接于一个圆**.** 根据多列米定理，圆内接四边形对角线的乘积等于两对边乘积之和，有



，



∵ AB = DC = c，AD = BC = a，

AC = BD = b，

∴ ，即 ，



∴ **.**



**【证法13】（作直角三角形的内切圆证明）**

在RtΔABC中，设直角边BC = a，AC = b，斜边AB = c**.** 作RtΔABC的内切圆⊙O，切点分别为D、E、F（如图），设⊙O的半径为r**.**

∵ AE = AF，BF = BD，CD = CE，

∴



= = r + r = 2r,



即 ，



∴ **.**



∴ ，



即 ，



∵ ，



∴ ，



又∵ = =



= = ，



∴ ，



∴ ，



∴ ， ∴ **.**



**【证法14】（利用反证法证明，反证法yyds！！！）**

如图，在RtΔABC中，设直角边AC、BC的长度分别为a、b，斜边AB的长为c，过点C作CD⊥AB，垂足是D**.**

假设，即假设 ，则由



==



可知 ，或者 **.** 即 AD：AC≠AC：AB，或者 BD：BC≠BC：AB**.**



在ΔADC和ΔACB中，

∵ ∠A = ∠A，



∴ 若 AD：AC≠AC：AB，则

∠ADC≠∠ACB**.**

在ΔCDB和ΔACB中，

∵ ∠B = ∠B，

∴ 若BD：BC≠BC：AB，则

∠CDB≠∠ACB**.**

又∵ ∠ACB = 90º，

∴ ∠ADC≠90º，∠CDB≠90º**.**

这与作法CD⊥AB矛盾**.** 所以，的假设不能成立**.**



∴ **.**



**【证法15】（辛卜松证明）**



直角三角形两直角边的长分别为a、b，斜边的长为c**.** 作边长是a+b的正方形ABCD**.** 把正方形ABCD划分成上方左图所示的几个部分，则正方形ABCD的面积为 ；把正方形ABCD划分成上方右图所示的几个部分，则正方形ABCD的面积为 =**.**



∴ ,



∴ **.**



**【证法16】（陈杰证明）**

设直角三角形两直角边的长分别为a、b（b>a），斜边的长为c**.** 做两个边长分别为a、b的正方形（b>a），把它们拼成如图所示形状，使E、H、M三点在一条直线上**.** 用数字表示面积的编号（如图）**.**



在EH = b上截取ED = a，连结DA、DC，则 AD = c**.**

∵ EM = EH + HM = b + a , ED = a，

∴ DM = EM―ED = ―a = b**.**



又∵ ∠CMD = 90º，CM = a，

∠AED = 90º， AE = b，

∴ RtΔAED ≌ RtΔDMC**.**

∴ ∠EAD = ∠MDC，DC = AD = c**.**

∵ ∠ADE + ∠ADC+ ∠MDC =180º，

∠ADE + ∠MDC = ∠ADE + ∠EAD = 90º，

∴ ∠ADC = 90º**.**

∴ 作AB∥DC，CB∥DA，则ABCD是一个边长为c的正方形**.**

∵ ∠BAF + ∠FAD = ∠DAE + ∠FAD = 90º，

∴ ∠BAF=∠DAE**.**

连结FB，在ΔABF和ΔADE中，

∵ AB =AD = c，AE = AF = b，∠BAF=∠DAE，

∴ ΔABF ≌ ΔADE**.**

∴ ∠AFB = ∠AED = 90º，BF = DE = a**.**

∴ 点B、F、G、H在一条直线上**.**

在RtΔABF和RtΔBCG中，

∵ AB = BC = c，BF = CG = a，

∴ RtΔABF ≌ RtΔBCG**.**

∵ ， ， ，



，



∴



=



=



=



∴ **.**



2021-10-07，By 李天星

